**УДК 539.3:624.016** DOI: 10.31650/2415-377X-2019-77-66-75

# АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКТИВНИХ ЗУСИЛЬ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ БРУСІВ ІЗ ПЛОСКОЮ ВІССЮ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

**Ковальчук С.Б.,** к.т.н.,
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua
**Горик О.В.**, д.т.н., професор,
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2804-5580
*Полтавська державна аграрна академія*

**Анотація.** Робота присвячена проблемі аналітичного визначення інтенсивності реактивних навантажень для статично визначних криволінійних брусів із плоскою віссю довільної форми, що перебувають під дією зосереджених та розподілених навантажень. У природній системі координат отримані узагальнені інтегральні вирази для визначення компонент рівнодійних активних і реактивних навантажень, що діють на поздовжніх циліндричних поверхнях та торцях бруса. Дані вирази разом із співвідношеннями для моделювання зосереджених, локалізованих та розподілених навантажень дозволяють аналітично визначати інтенсивність реактивних зусиль у опорах та закріпленнях статично визначних криволінійних брусів. Наведено приклад застосування отриманих співвідношень при аналітичному визначенні реакцій опор для шарнірно закріпленого бруса із параболічною віссю.

**Ключові слова:** криволінійний брус, природна система координат, активне навантаження, реактивні зусилля, статична рівновага.

**Введення.** Криволінійні бруси є поширеними елементами машинобудівних та будівельних конструкцій. Тому дослідження деформування криволінійних однорідних та композитних брусів було і залишається одним із важливих та актуальних напрямів розвитку механіки деформівного твердого тіла. Додатковим свідченням цьому є незмінна увага дослідників до різних задач деформування таких елементів, що знайшло відображення у значній кількості робіт останнього часу [1-9].

Для більшості задач механіки пружного деформування прямих чи криволінійних стержньових елементів конструкцій необхідними вихідними даними є розподіл навантажень на його поверхнях. Повне навантаження таких елементів складає зовнішнє активне навантаження та реакції в'язей накладених на переміщення закріплених (опорних) точок. Активна складова навантаження зазвичай відома, реактивна – потребує визначення, що є одним із перших кроків розв'язання будь-якої задачі міцності та жорсткості стержня.

Незалежно від того статично визначна задача чи статично невизначна, частина реактивних зусиль прямо чи опосередковано має визначатись, через умови рівноваги статики. По іншому – реакції, поряд із кінематичними умовами, які накладають наявні закріплення, мають забезпечувати виконання умов рівноваги бруса, як жорсткого тіла.

У випадку, коли навантаження бруса представлене зосередженими силами та моментами, визначення реакції опор, незалежно від форми його осі, проблеми не складає. Однак, наявність навіть зведеного до осі стержня рівномірно розподіленого нормального чи дотичного навантаження сильно ускладнює використання, відомих з теоретичної механіки, умов рівноваги. При цьому окремою проблемою є зведення розподілених на поздовжніх поверхнях навантажень до осі криволінійного стержня. Навіть у відомих ґрунтовних працях з механіки криволінійних стержнів [10-13], дані етапи розв'язання задач, зазвичай, залишаються поза увагою дослідників і активне та реактивне навантаження, за винятком балок на пружній основі, вважається відомим.

У ряді попередніх робіт авторами було розроблено узагальнені підходи до аналітичного описання будови, моделювання зосереджених [14] та локалізованих [15] на ділянці поверхні навантажень, визначення внутрішніх силових факторів [16] та побудови рівнянь теорії пружності [17] для криволінійних брусів із плоскою віссю довільної форми, що ґрунтуються на понятті природної системи координат [18, 19]. Побудовані у вказаних роботах, підходи та теоретичні співвідношення, дозволяють розробити аналітичний метод статичного розрахунку криволінійних брусів, який з одного боку буде узагальненим по відношенню до форми їхніх осей та прикладеного навантаження, а з іншого буде достатньо деталізованим для практичної реалізації.

**Мета та завдання.** Метою даної роботи є побудова узагальненого підходу до визначення інтенсивності реактивних навантажень для статично визначних криволінійних балок із плоскою віссю довільної форми, що перебувають під дією системи нормальних та дотичних навантажень, розподілених на поздовжніх циліндричних поверхнях та торцях. Основним завданням – є встановлення зв'язку між розподіленими на криволінійних поверхнях бруса навантаженнями та їх рівнодійними.

**Матеріали та методика дослідження.** Задачу розглянемо у постановці, аналогічній [16]. Брус із криволінійною плоскою віссю (рис. 1), що є плоскою шматково-гладкою кривою $g_{\xi_C}$ і лежить у площині симетрії бруса $XOZ$, зберігає рівновагу під дією зовнішніх нормальних $p_\xi^{\Pi_\varsigma}, p_\eta^{T_\varsigma}$ і дотичних $p_\eta^{\Pi_\varsigma}, p_\xi^{T_\varsigma}$ навантажень, розподілених на поздовжніх ($\Pi_\varsigma, \varsigma = 1, 2$) та торцевих ($T_\varsigma$) поверхнях, відповідно. Навантаження розподілені за довільним законом по довжині $\Pi_\varsigma$ та висоті $T_\varsigma$, але в обох випадках – симетрично відносно площини $XOZ$.

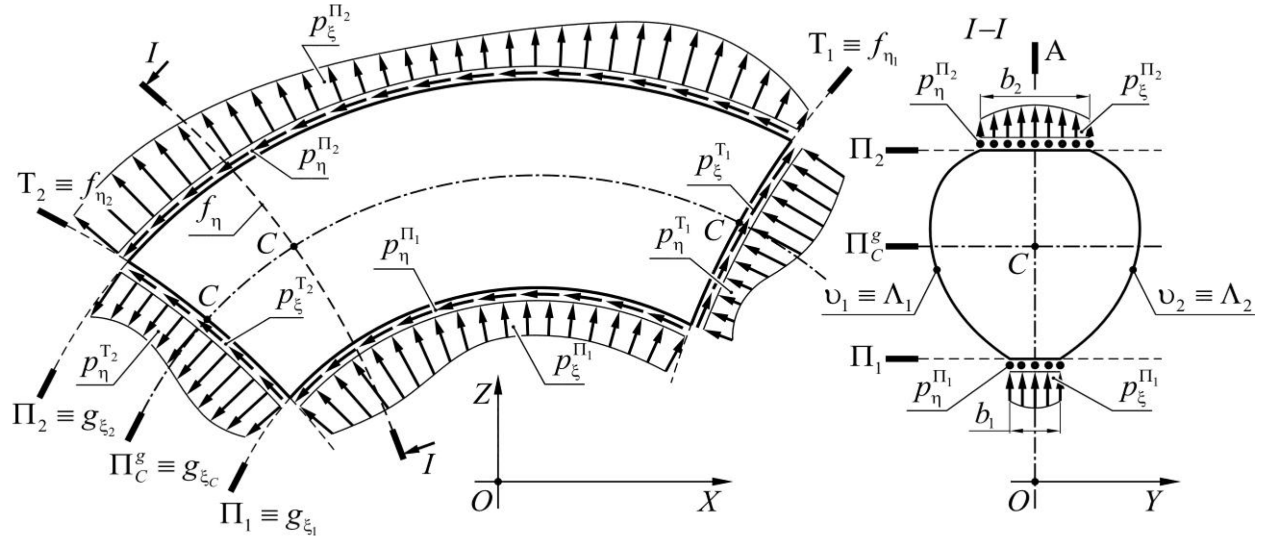


Рис. 1. Будова та зовнішнє навантаження криволінійного бруса

Як основну систему координат для розглядуваного бруса оберемо природну циліндричну систему координат $H\Xi Y$, у якій поздовжні поверхні $\Pi_\varsigma$ та торці $T_\varsigma$ належать взаємно ортогональним однопараметричним сімействам координатних поверхонь.

Повні нормальні $p_\xi^{\Pi_\varsigma}, p_\eta^{T_\varsigma}$ та дотичні $p_\eta^{\Pi_\varsigma}, p_\xi^{T_\varsigma}$ навантаження можна вважати сумарними, які у загальному випадку складаються із активної та реактивної складових:

$$p = p_a + p_r .$$

Разом, повні навантаження усіх поверхонь бруса складають зрівноважену систему сил, яка може бути приведена до плоскої. Для такої системи умови рівноваги статики у допоміжній прямокутній системі координат $XOZ$ можна записати на основі відомих умов теоретичної механіки у такому вигляді:

$$Q_x^a + Q_x^r = 0, \quad Q_z^a + Q_z^r = 0, \quad M_{yK}^a + M_{yK}^r = 0, \tag{1}$$

де $Q_x^a, Q_z^a, M_{yK}^a$ та $Q_x^r, Q_z^r, M_{yK}^r$ – проекції головного вектора на осі допоміжної системи $XOZ$ та сумарний момент відносно довільної точки $K$ площини $XOZ$, системи активних $p_a$ і реактивних $p_r$ сил, відповідно.

У випадку, коли геометрія поверхонь бруса задана аналітично, співвідношення для визначення $Q_x^s, Q_z^s, M_{yK}^s$ ($s = a, r$) можна отримати інтегруючи по відповідних циліндричних поверхнях складові розподілених навантажень $p_\xi^{\Pi_\varsigma}, p_\eta^{\Pi_\varsigma}, p_\xi^{T_\varsigma}, p_\eta^{T_\varsigma}$ у допоміжній системі координат $XYZ$. Такий підхід на перший погляд видається найбільш універсальним, однак він є надто загальним для практичної реалізації і потребує індивідуального підходу для кожного конкретного випадку форми бруса. Натомість, із використанням інтегральних виразів для внутрішніх силових факторів, отриманих у [16], можна отримати співвідношення, які безпосередньо пов'язують зовнішні навантаження, їх рівнодійні $Q_x^s, Q_z^s, M_{yK}^s$ і геометрію поверхонь.

Згідно [16] внутрішні силові фактори криволінійного бруса пов'язані із навантаженням на його поздовжніх поверхнях $\Pi_\varsigma$ і торцях $T_\varsigma$ наступними інтегральними виразами:

$$N_\eta = \operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\cos\alpha|_{\xi=\xi_C}\sum_{i=1}^{2}\int_{\eta_1}^{\eta}\left\{\left[L_\eta\cos\alpha\right]|_{\substack{\eta=\theta,\\ \xi=\xi_i}}\begin{bmatrix}\left(q_\xi^{\Pi_i}-q_\eta^{\Pi_i}\kappa\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\,\kappa|_{\xi=\xi_C}-\\ -\left(q_\xi^{\Pi_i}\kappa+q_\eta^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\end{bmatrix}\right\}d\theta+N_{\eta 1},$$

$$Q_\xi = -\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\cos\alpha|_{\xi=\xi_C}\sum_{i=1}^{2}\int_{\eta_1}^{\eta}\left\{\left[L_\eta\cos\alpha\right]|_{\substack{\eta=\theta,\\ \xi=\xi_i}}\begin{bmatrix}\left(q_\xi^{\Pi_i}\kappa+q_\eta^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\,\kappa|_{\xi=\xi_C}+\\ +\left(q_\xi^{\Pi_i}-q_\eta^{\Pi_i}\kappa\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\end{bmatrix}\right\}d\theta+Q_{\xi 1}, \quad (2)$$

$$M_y = \operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\sum_{i=1}^{2}\int_{\eta_1}^{\eta}\left\{\left[L_\eta\cos\alpha\right]|_{\substack{\eta=\theta,\\ \xi=\xi_i}}\begin{bmatrix}\omega_x|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}^{\xi=\xi_C}\left(q_\xi^{\Pi_i}\kappa+q_\eta^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}-\\ -\omega_z|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}^{\xi=\xi_C}\left(q_\xi^{\Pi_i}-q_\eta^{\Pi_i}\kappa\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\end{bmatrix}\right\}d\theta+M_{y1},$$

де $\eta,\xi$ – криволінійні координати точки у природній системі $H\Xi$.

Функції $N_{\eta 1}, Q_{\xi 1}, M_{y1}$ у (2) є складовими внутрішніх силових факторів від навантажень у початковому перерізі бруса і визначаються за інтегральними виразами:

$$N_{\eta 1} = -\cos\alpha|_{\xi=\xi_C}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{\left[L_\xi\cos\alpha\right]|_{\eta=\eta_1}\left[\left(q_\eta^{T_1}+q_\xi^{T_1}\kappa|_{\eta=\eta_1}\right)+\kappa|_{\xi=\xi_C}\left(q_\eta^{T_1}\kappa|_{\eta=\eta_1}-q_\xi^{T_1}\right)\right]\right\}d\xi,$$

$$Q_{\xi 1} = -\cos\alpha|_{\xi=\xi_C}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{\left[L_\xi\cos\alpha\right]|_{\eta=\eta_1}\left[\kappa|_{\xi=\xi_C}\left(q_\eta^{T_1}+q_\xi^{T_1}\kappa|_{\eta=\eta_1}\right)-\left(q_\eta^{T_1}\kappa|_{\eta=\eta_1}-q_\xi^{T_1}\right)\right]\right\}d\xi, \quad (3)$$

$$M_{y1} = \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{\left[L_\xi\cos\alpha\right]|_{\eta=\eta_1}\left[\left(q_\eta^{T_1}\kappa|_{\eta=\eta_1}-q_\xi^{T_1}\right)\omega_z|_{\eta=\eta_1}^{\xi=\xi_C}-\left(q_\eta^{T_1}+q_\xi^{T_1}\kappa|_{\eta=\eta_1}\right)\omega_x|_{\xi=\xi_C}^{\eta=\eta_1}\right]\right\}d\xi.$$

У співвідношеннях (2) та (3): $L_\xi = L_\xi(\eta,\xi)$, $L_\eta = L_\eta(\eta,\xi)$ – коефіцієнти Ламе природної системи координат $H\Xi$; $\alpha=\alpha(\eta,\xi)$ – кут між дотичною до кривої $f_\eta$ (проекція поперечного перерізу на $XOZ$) та додатним напрямом осі $OX$; $\kappa=\operatorname{tg}\alpha$; $\omega_x(\eta,\xi)=x$, $\omega_z(\eta,\xi)=z$ – функції зв'язку між координатами довільної точки $K(x,z)$ у допоміжній системі $XOZ$ та координатами точки $K(\eta,\xi)$ у природній системі $H\Xi$; $q_\xi^{\Pi_\varsigma}$, $q_\eta^{\Pi_\varsigma}$, $q_\eta^{T_\varsigma}$, $q_\xi^{T_\varsigma}$ – зведене до площини $XOZ$, зовнішнє навантаження:

$$q_\xi^{\Pi_\varsigma} = \int_{\upsilon_1(\xi_\varsigma)}^{\upsilon_2(\xi_\varsigma)} p_\xi^{\Pi_\varsigma}dy,\ q_\eta^{\Pi_\varsigma} = \int_{\upsilon_1(\xi_\varsigma)}^{\upsilon_2(\xi_\varsigma)} p_\eta^{\Pi_\varsigma}dy,\ q_\xi^{T_\varsigma} = \int_{\upsilon_1(\xi_\varsigma)}^{\upsilon_2(\xi_\varsigma)} p_\xi^{T_\varsigma}dy,\ q_\eta^{T_\varsigma} = \int_{\upsilon_1(\xi_\varsigma)}^{\upsilon_2(\xi_\varsigma)} p_\eta^{T_\varsigma}dy. \quad (4)$$

Аналітичний зв'язок коефіцієнтів $L_\xi$, $L_\eta$ та величин $\alpha$, $\kappa$, $\omega_x$, $\omega_z$ із геометрією криволінійного бруса розкритий у роботах [18, 19], де також наведені приклади визначення вказаних величин для брусів різної форми.

Співвідношення (2), по суті, дають значення компонент рівнодійної сили та рівнодійний момент, приведені до точки осі бруса із координатами $(\eta,\xi_C)$, для навантажень, що знаходяться, умовно, зліва від перерізу із координатою $\eta$. У точці площини $XOZ$ для якої $\alpha|_{\xi=\xi_C}=\pi/2$, лінії дії векторів зусиль $N_\eta, Q_\xi$ (2) стають паралельними координатним осям $OX$ та $OZ$, відповідно. Тоді, підставивши до перших двох співвідношень (2): $\eta=\eta_2$,

$\alpha|_{\xi=\xi_C}=\pi/2$, і додавши відповідні складові рівнодійних від навантажень на торцях $T_\varsigma$, для рівнодійних зовнішнього активного та реактивного навантаження бруса можемо записати:

$$Q_x^s = N_\eta^s\left(\eta_2, \alpha|_{\xi=\xi_C}=\frac{\pi}{2}\right)+Q_{x2}^s=\sum_{i=1}^{2}\left\{\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[L_\eta\left(q_{\xi s}^{\Pi_i}\cos\alpha-q_{\eta s}^{\Pi_i}\sin\alpha\right)\right]|_{\substack{\eta=\theta,\\ \xi=\xi_i}}\,d\theta+Q_{xi}^s\right\},$$
$$Q_z^s = -Q_\xi^s\left(\eta_2, \alpha|_{\xi=\xi_C}=\frac{\pi}{2}\right)+Q_{z2}^s=\sum_{i=1}^{2}\left\{\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[L_\eta\left(q_{\xi s}^{\Pi_i}\sin\alpha+q_{\eta s}^{\Pi_i}\cos\alpha\right)\right]|_{\substack{\eta=\theta,\\ \xi=\xi_i}}\,d\theta+Q_{zi}^s\right\}, \quad (5)$$

де $s=a,r$; $Q_{xi}^S, Q_{zi}^S$ – проекції рівнодійних від навантаження прикладеного до поверхонь торців $T_i$ бруса.

На основі третього співвідношення (2), для рівнодійного моменту активних і реактивних навантажень відносно довільної точки $K(\eta_2,\xi_K)$ торця $T_2$ отримаємо:

$$M_{yK}^s=-M_y^s(\eta_2,\xi_C=\xi_K)+M_{y2K}^s=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\left\{\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\begin{bmatrix}\left[L_\eta\left(q_{\xi s}^{\Pi_i}\cos\alpha-q_{\eta s}^{\Pi_i}\sin\alpha\right)\right]|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\ \omega_z\,|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}^{\eta=\eta_2,\xi=\xi_K}-\\ -\left[L_\eta\left(q_{\xi s}^{\Pi_i}\sin\alpha+q_{\eta s}^{\Pi_i}\cos\alpha\right)\right]|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\ \omega_x\,|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}^{\eta=\eta_2,\xi=\xi_K}\end{bmatrix}d\theta+M_{yiK}^s\right\}, \quad (6)$$

де $s=a,r$; $M_{yiK}^S$ – момент від навантаження на торцях $T_i$ бруса відносно точки $K$.

Рівнодійні навантаження на торцях бруса $Q_{xi}^s, Q_{zi}^s, M_{yiK}^s$, аналогічно (5) та (6), можна отримати на основі співвідношень для внутрішніх силових факторів (3):

$$Q_{xi}^s=N_{\eta 1}\left(\eta_1=\eta_i,\alpha|_{\xi=\xi_C}=\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[L_\xi\left(-q_{\eta s}^{T_i}\sin\alpha+q_{\xi s}^{T_i}\cos\alpha\right)\right]|_{\eta=\eta_i}\,d\xi,$$
$$Q_{zi}^s=-Q_{\xi 1}\left(\eta_1=\eta_i,\alpha|_{\xi=\xi_C}=\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[L_\xi\left(q_{\eta s}^{T_i}\cos\alpha+q_{\xi s}^{T_i}\sin\alpha\right)\right]|_{\eta=\eta_i}\,d\xi, \quad (7)$$
$$M_{yiK}^s=-M_{y1}(\eta_1=\eta_i,\xi_C=\xi_K)=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\begin{bmatrix}\left[L_\xi\left(q_{\eta s}^{T_i}\sin\alpha-q_{\xi s}^{T_i}\cos\alpha\right)\right]|_{\eta=\eta_i}\ \omega_z\,|_{\xi=\xi_K,\eta=\eta_2}^{\eta=\eta_i}+\\ +\left[L_\xi\left(q_{\eta s}^{T_i}\cos\alpha+q_{\xi s}^{T_i}\sin\alpha\right)\right]|_{\eta=\eta_i}\ \omega_x\,|_{\xi=\xi_K,\eta=\eta_2}^{\eta=\eta_i}\end{bmatrix}d\xi.$$

Компоненти розподіленого навантаження у природній криволінійній системі координат $H\Xi$ пов’язані із компонентами у прямокутній системі $XOZ$ наступними залежностями:

$$q_x^{\Pi_\varsigma}=q_\xi^{\Pi_\varsigma}\cos\alpha|_{\xi=\xi_\varsigma}-q_\eta^{\Pi_\varsigma}\sin\alpha|_{\xi=\xi_\varsigma},\qquad q_z^{\Pi_\varsigma}=q_\xi^{\Pi_\varsigma}\sin\alpha|_{\xi=\xi_i}+q_\eta^{\Pi_\varsigma}\cos\alpha|_{\xi=\xi_i},$$
$$q_x^{T_\varsigma}=q_\xi^{T_\varsigma}\cos\alpha|_{\eta=\eta_\varsigma}-q_\eta^{T_\varsigma}\sin\alpha|_{\eta=\eta_\varsigma},\qquad q_z^{T_\varsigma}=q_\eta^{T_\varsigma}\cos\alpha|_{\eta=\eta_\varsigma}+q_\xi^{T_\varsigma}\sin\alpha|_{\eta=\eta_\varsigma},\ \varsigma=1,2. \quad (8)$$

Для випадку зведеного навантаження представленого компонентами у допоміжній прямокутній системі координат $XOZ$ співвідношення (5)-(7) із використанням (8) можна перетворити до такого вигляду:

$$Q_x^s=\sum_{i=1}^{2}\left\{\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(L_\eta q_{xs}^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\,d\theta+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(L_\xi|_{\eta=\eta_i}\,q_{xs}^{T_i}\right)d\xi\right\},$$
$$Q_z^s=\sum_{i=1}^{2}\left\{\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left(L_\eta q_{zs}^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\,d\theta+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(L_\xi|_{\eta=\eta_i}\,q_{zs}^{T_i}\right)d\xi\right\}, \quad (9)$$
$$M_{yK}^s=\sum_{i=1}^{2}\left\{\operatorname{sgn}(\eta_2-\eta_1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[\left(L_\eta q_{xs}^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\ \omega_z\,|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}^{\eta=\eta_2,\xi=\xi_K}-\left(L_\eta q_{zs}^{\Pi_i}\right)|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}\ \omega_x\,|_{\eta=\theta,\xi=\xi_i}^{\eta=\eta_2,\xi=\xi_K}\right]d\theta+\right.$$
$$\left.+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[L_\xi|_{\eta=\eta_i}\left(q_{xs}^{T_i}\omega_z\,|_{\xi=\xi_C,\eta=\eta_2}^{\eta=\eta_i}-q_{zs}^{T_i}\omega_x\,|_{\xi=\xi_C,\eta=\eta_2}^{\eta=\eta_i}\right)\right]d\xi\right\}.$$

Для статично визначної задачі застосування співвідношень (5), (6), (7) або (9) у рівняннях (1) дозволяє визначити невідомі інтенсивності реактивного навантаження бруса, викликаного накладеними в'язями. У випадку статично невизначної задачі, кількість невідомих параметрів реактивного навантаження перевищує кількість рівнянь рівноваги (1) і для розв'язання задачі вони мають бути доповнені додатковими рівняннями, що зазвичай можуть бути отримані виходячи із відповідності переміщень закріплених точок бруса накладеним на них кінематичним умовам.

Співвідношення (5)-(7) та (9) містять функції розподілених навантажень, що дозволяє безпосередньо застосовувати їх у ході визначення параметрів реактивного навантаження представленого безперервною функцією криволінійної координати. У випадку ідеалізованих закріплень окремих точок, реактивні навантаження є зосередженими у закріплених точках силами та моментами, що створює певні труднощі застосування даних співвідношень. Однак, як показано у роботах [14] та [15], такі типи навантажень криволінійних брусів можна описати у вигляді еквівалентних розподілених навантажень із застосуванням узагальнених функцій. Використання отриманих у даних роботах співвідношень дозволяє враховувати у (5)-(7), (9), як безперервні реактивні навантаження, так і зосереджені у точці або локалізовані на ділянці без використання додаткових прийомів, що робить універсальним запропонований підхід до статичного розрахунку криволінійних брусів.

**Результати дослідження.** Як приклад реалізації отриманих співвідношень розглянемо визначення реактивних зусиль для шарнірно закріпленого консольного бруса із параболічною віссю (рис. 1), що перебуває під дією рівномірно розподіленого нормального навантаження на поверхні $\Pi_2$ та зосередженої сили і моменту на торці $T_1$: $F_1 = 1{,}85\kappa H$, $M_1 = 0{,}55\kappa H \cdot м$, $q_2 = 7{,}95\kappa H/м$. Поперечний переріз бруса незмінний по його довжині і має висоту $h$.

Поставлену задачу розв'яжемо із застосуванням природної системи координат із параметризацією за координатою $x$ поперечного перерізу бруса (координатою точки параболічної осі) [19].

Параболічна вісь бруса на рис. 2 задана рівнянням:

$$g_{\xi_C} = g_{\xi_0} = -\frac{1}{h_1^2}x^2 + h_2 - z = 0. \tag{10}$$

Величини, що характеризують відповідну природну систему координат, отримані згідно [19]:

$$\alpha = -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\eta}{h_1^2}\right) + \frac{\pi}{2},\ \kappa = \frac{h_1^2}{2\eta},\ L_\xi = 1,\ L_\eta = \frac{2h_1^4\xi + \left(h_1^4 + 4\eta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{h_1^2\left(h_1^4 + 4\eta^2\right)}. \tag{11}$$

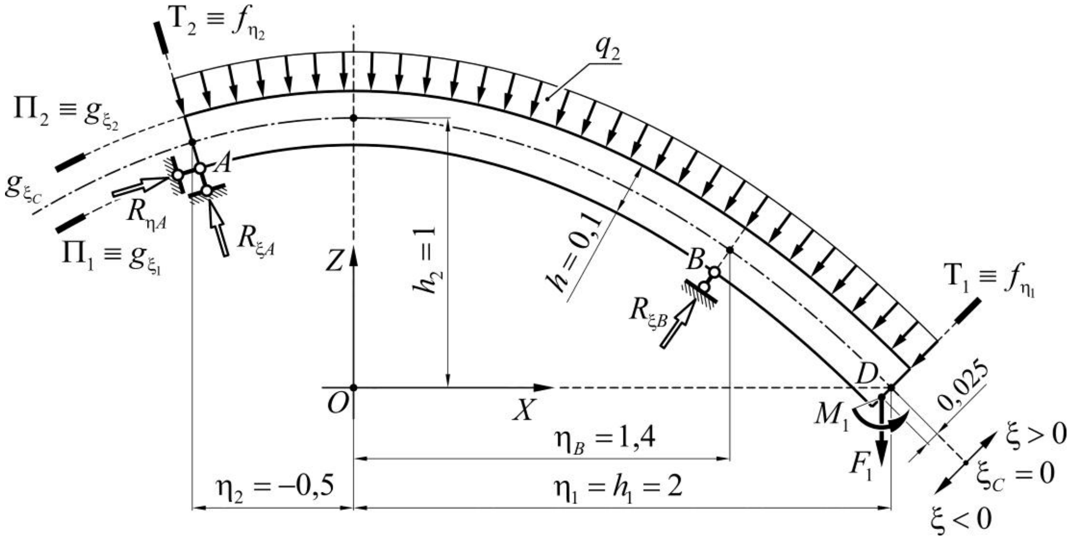


Рис. 2. Схема бруса з параболічною віссю (розміри в $м$)

Активні навантаження розглядуваного бруса складають сила $F_1$ і момент $M_1$, що прикладені до торця $\mathrm{T}_1$ та рівномірне нормальне навантаження $q_2$, що діє на поздовжню поверхню $\Pi_2$. Еквівалентні розподілені навантаження, що моделюють вказані активні навантаження бруса, згідно [14] та [15], матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&q_{\eta a}^{\mathrm{T}_1} = -F_1 \cos\alpha \,|_{\eta=\eta_1}\, \Delta(\xi-\xi_D) - M_1 \frac{d}{d\xi}\Delta(\xi-\xi_D), \quad q_{\eta a}^{\mathrm{T}_2}=0, \quad q_{\xi a}^{\Pi_1}=0, \quad q_{\xi a}^{\Pi_2}=-q_2,\\
&q_{\xi a}^{\mathrm{T}_1} = -F_1 \sin\alpha \,|_{\eta=\eta_1}\, \Delta(\xi-\xi_D), \qquad\qquad\qquad\qquad q_{\xi a}^{\mathrm{T}_2}=0, \quad q_{\eta a}^{\Pi_1}=0, \quad q_{\eta a}^{\Pi_2}=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Реактивні навантаження бруса складають зосереджені реакції шарнірних опор $A$ та $B$, представлені у вигляді нормальних і дотичних компонент $R_{\eta A}, R_{\xi A}$ та $R_{\xi B}$, що діють на торці $\mathrm{T}_2$ та поверхні $\Pi_1$, відповідно. Співвідношення, що моделюють дані навантаження, згідно [14] та [15] матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&q_{\eta r}^{\mathrm{T}_1}=0, \quad q_{\eta r}^{\mathrm{T}_2} = -R_{\eta A}\Delta(\xi-\xi_A), \quad q_{\xi r}^{\Pi_1} = \frac{R_{\xi B}}{L_\eta \,|_{\xi=\xi_1}}\Delta(\eta-\eta_B), \quad q_{\xi r}^{\Pi_2}=-q_2,\\
&q_{\xi r}^{\mathrm{T}_1}=0, \quad q_{\xi r}^{\mathrm{T}_2} = R_{\xi A}\Delta(\xi-\xi_A), \qquad q_{\eta r}^{\Pi_1}=0, \qquad\qquad\qquad q_{\eta r}^{\Pi_2}=0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Підставивши (12) до (5)-(7) отримаємо наступні співвідношення для рівнодійних активного навантаженням бруса:

$$\begin{aligned}
&Q_x^a = -q_2\left(\frac{h_1^2\xi_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_2^2}} - \frac{h_1^2\xi_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_1^2}} + \frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{h_1^2}\right),\\
&Q_z^a = q_2\left(\frac{2\eta_2\xi_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_2^2}} - \frac{2\eta_1\xi_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_1^2}} - (\eta_1-\eta_2)\right) - F_1,\\
&M_{yK}^a = -q_2\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_1^2}} + \frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{4h_1^4} + \frac{1}{2}\right)(\eta_1-\eta_2)^2 - F_1\left(\frac{2\xi_D\eta_1}{\sqrt{h_1^4+4\eta_1^2}} + \eta_1 - \eta_2\right) + M_1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Тут у якості точки $K$, відносно якої визначався рівнодійний момент $M_{yK}^a$, прийнятий центр ваги торця $\mathrm{T}_2$ і, відповідно, $\xi_K = \xi_C = 0$.

Аналогічно, підстановкою (13) до (5)-(7), отримані рівнодійні реактивного навантаження бруса:

$$\begin{aligned}
&Q_x^r = R_{\xi B}\frac{2\eta_B}{\sqrt{h_1^4+4\eta_B^2}} + R_{\eta A}\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_2^2}} + R_{\xi A}\frac{2\eta_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_2^2}},\\
&Q_z^r = R_{\xi B}\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_B^2}} - R_{\eta A}\frac{2\eta_2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_2^2}} + R_{\xi A}\frac{h_1^2}{\sqrt{h_1^4+4\eta_2^2}},\\
&M_{yK}^r = R_{\xi B}\frac{2\eta_B^2+2\eta_B\eta_2+h_1^4}{h_1^2\sqrt{h_1^4+4\eta_B^2}}(\eta_B-\eta_2) - R_{\eta A}\xi_A.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для бруса на рис. 2: $h_1 = 2м,\ h_2 = 1м,\ \eta_1 = 2м,\ \eta_2 = -0,5м,\ \eta_B = 1,4м,\ \xi_A = \xi_1 = -0,05м$, $\xi_D = -0,025м$. Підставивши (14) і (15) до системи (1) і розв'язавши отримані рівняння відносно невідомих інтенсивностей реактивних зусиль із урахуванням прийнятих значень координат та інтенсивності навантажень, отримаємо:

$$R_{\eta A} = -1083,38H,\ R_{\xi A} = 7646,14H,\ R_{\xi B} = 18245,61H.$$

Як бачимо, напрям дії нормальної складової $R_{\eta A}$ реакції шарнірно нерухомої опори $A$ був обраний невірно.

Для зручності, стержні опори $A$ були спрямовані по нормалі та вздовж дотичної до поздовжнього волокна бруса, однак відомі значення компонент $R_{\eta A}$ і $R_{\xi A}$ дозволять шляхом нескладних перетворень перейти до будь-якої іншої орієнтації опорних стержнів.

У наведеному прикладі, з метою перевірки правильності отримуваних значень рівнодійних, прийняте достатньо просте навантаження. Однак запропонований метод без внесення змін дозволяє враховувати комбінації зосереджених, локалізованих та розподілених навантажень будь-якої складності.

**Висновки.** Таким чином, отримані узагальнені співвідношення для аналітичного визначення рівнодійних зовнішнього навантаження та запропоновано методику аналітичного визначення інтенсивностей реактивного навантаження для статично визначного криволінійного бруса із плоскою віссю довільної форми. Теоретичні співвідношення отримані у природній, для геометрії криволінійного бруса, системі координат і є інваріантними по відношенню до форми його осі. Водночас вони є достатньо деталізованими, щоб за відомими геометричними параметрами бруса (параметрами його природної системи координат) та розподілом навантажень отримати готові інтеграли їх рівнодійних.

Отримані співвідношення апробовані на прикладі визначення реакцій опор шарнірно закріпленого бруса постійного перерізу із віссю у формі параболи, що перебуває під дією зосереджених на розподілених навантажень.

Запропонований аналітичний метод статичного розрахунку криволінійних брусів, окрім отримання числових значень реактивних навантажень, дозволяє встановити функціональні залежності між величинами активних і реактивних сил, координатами точок їх прикладання та геометрією бруса. Разом із інтегральними співвідношеннями для внутрішніх силових факторів це відкриває можливості аналізу розрахункової схеми криволінійного бруса з метою її оптимізації.

## Література

1. Lee B.K. Free vibrations of arches with variable curvature / B.K. Lee, J.F. Wilson // Journal of Sound and Vibration. – 1990. – 136(1). – pp. 75-89.

2. Oh S.J. Natural frequencies of non-circular arches with rotary inertia and shear deformation / S.J. Oh, B.K. Lee, I.W. Lee // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – 219(1). – pp. 23-33.

3. Nieh K.Y. An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches / K.Y. Nieh, C.S. Huang, Y.P. Tseng // Computers & Structures. – 2003. – 81(13). – pp. 1311-1327.

4. Lin K.C. The closed form general solutions of 2-D curved laminated beams of variable curvatures / K.C. Lin, C.M. Hsieh // Composite Structures. – 2007. – 79(4). – pp. 606-618.

5. Shahba A. New shape functions for non-uniform curved Timoshenko beams with arbitrarily varying curvature using basic displacement functions / A. Shahba, R. Attarnejad, S. Jandaghi Semnani, H. Honarvar Gheitanbaf // Meccanica. – 2013. – 48(1). – pp. 159-174.

6. Hajianmaleki M. Vibrations of straight and curved composite beams: A review / M. Hajianmaleki, M.S. Qatu // Composite Structures. – 2013. – 100. – pp. 218-232.

7. Luu A.-T. Bending and buckling of general laminated curved beams using NURBS-based isogeometric analysis / A.-T. Luu, N.-I. Kim, J. Lee // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2015. – 54. – pp. 218-231.

8. Thurnherr C. Higher-order beam model for stress predictions in curved beams made from anisotropic materials / C. Thurnherr, R.M.J. Groh, P. Ermanni, P.M. Weaver // International Journal of Solids and Structures. – 2016. – 97-98. – pp. 16-28.

9. Di Re P. A multiscale force-based curved beam element for masonry arches / P. Di Re, D. Addessi, E. Sacco // Computers & Structures. – 2018. – 208. – pp. 17-31.

10. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней / Е.П. Попов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 296 с.

11. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч. Часть 1. Статика / В.А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.

12. Левин В.Е. Механика деформирования криволинейных стержней: монография /

В.Е. Левин, Н.В. Пустовой. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 208 с.

13. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

14. Ковальчук С.Б. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. Частина 1. Моделювання зосереджених у точці навантажень / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: ОДАБА, 2018. – Вип. 73. – С. 31-40.

15. Ковальчук С.Б. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. Частина 2. Моделювання локалізованих навантажень та приклади застосування / С.Б. Ковальчук // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: ОДАБА, 2019. – Вип. 76. – С. 31-40.

16. Ковальчук С.Б. Інтегральні та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: ОДАБА, 2018. – Вип. 70. – С.  -48.

17. Ковальчук С.Б. Рівняння теорії пружності для композитних брусів із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Міжвуз. зб. Наукові нотатки. – Луцьк: ЛНТУ, 2018. – Вип. 63 – С. 89-97.

18. Ковальчук С.Б. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – Одеса: ОДАБА, 2017. – Вип. 68. – С. 31-38.

19. Ковальчук С.Б. Природна система координат для криволінійних композитних брусів із незмінними лінійними розмірами поперечних перерізів / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Міжвуз. зб. Наукові нотатки. – Луцьк: ЛНТУ, 2019. – Вип. 65 – С. 106-117.

**References**

[1] B.K. Lee, J.F. Wilson, "Free vibrations of arches with variable curvature", *Journal of Sound and Vibration*, 136(1), pp. 75-89, 1990.

[2] S.J. Oh, B.K. Lee, I.W. Lee, "Natural frequencies of non-circular arches with rotary inertia and shear deformation", *Journal of Sound and Vibration*, 219(1), pp. 23-33, 1999.

[3] K.Y. Nieh, C.S. Huang, Y.P. Tseng, "An analytical solution for in-plane free vibration and stability of loaded elliptic arches", *Computers & Structures*, 81(13), pp. 1311-1327, 2003.

[4] K.C. Lin, C.M. Hsieh, "The closed form general solutions of 2-D curved laminated beams of variable curvatures", *Composite Structures*, 79(4), pp. 606-618, 2007.

[5] A. Shahba, R. Attarnejad, S. Jandaghi Semnani, H. Honarvar Gheitanbaf, "New shape functions for non-uniform curved Timoshenko beams with arbitrarily varying curvature using basic displacement functions", *Meccanica*, 48(1), pp. 159-174, 2013.

[6] M. Hajianmaleki, M.S. Qatu, "Vibrations of straight and curved composite beams: A review", *Composite Structures*, 100, pp. 218-232, 2013.

[7] A.-T. Luu, N.-I. Kim, J. Lee, "Bending and buckling of general laminated curved beams using NURBS-based isogeometric analysis", *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 54, pp. 218-231, 2015.

[8] C. Thurnherr, R.M.J. Groh, P. Ermanni, P.M. Weaver, "Higher-order beam model for stress predictions in curved beams made from anisotropic materials", *International Journal of Solids and Structures*, 97-98, pp. 16-28, 2016.

[9] P. Di Re, D. Addessi, E. Sacco, "A multiscale force-based curved beam element for masonry arches", *Computers & Structures*, 208, pp. 17-31, 2018.

[10] E.P. Popov, *Teoriya i raschet gibkih uprugih sterzhney*. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986.

[11] V.A. Svetlitskiy, *Mehanika sterzhney. V 2-h ch. Chast 1. Statika*. Moscow: Vyisshaya shkola, 1987.

[12] V.E. Levin, N.V. Pustovoy, *Mehanika deformirovaniya krivolineynyih sterzhney: monografiya*. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2008.
[13] V.V. Vasilev, *Mehanika konstruktsiy iz kompozitsionnyih materialov*. Moscow: Mashinostroenie, 1988.
[14] S.B. Koval'chuk, O.V. Goryk, "Analitychne modeliuvannia zoseredzhenykh ta lokalizovanykh navantazhen brusiv iz kryvoliniinoiu ploskoiu vissiu. Chastyna 1. Modeliuvannia zoseredzhenykh u tochtsi navantazhen", *Visnyk ODABA*, Odesa: ODABA, Vol. 73, pp. 31-40, 2018.
[15] S.B. Koval'chuk, "Analitychne modeliuvannia zoseredzhenykh ta lokalizovanykh navantazhen brusiv iz kryvoliniinoiu ploskoiu vissiu. Chastyna 2. Modeliuvannia lokalizovanykh navantazhen ta pryklady zastosuvannia", *Visnyk ODABA*, Odesa: ODABA, Vol. 75, pp. 31-40, 2019.
[16] S.B. Koval'chuk, O.V. Goryk, "Intehralni ta dyferentsialni spivvidnoshennia dlia vnutrishnikh sylovykh faktoriv pry zghyni brusa z kryvoliniinoiu ploskoiu vissiu dovilnoi formy", *Visnyk ODABA*, Odesa: ODABA, Vol. 70, pp. 40-48, 2018.
[17] S.B. Koval'chuk, O.V. Goryk, "Rivniannia teorii pruzhnosti dlia kompozytnykh brusiv iz ploskoiu vissiu dovilnoi formy u pryrodnii kryvoliniinii systemi koordynat", *Mizhvuz. zb. Naukovi notatky*, Lutsk: LNTU, Vol. 63, pp. 89-97, 2018.
[18] S.B. Koval'chuk, O.V. Goryk, "Pryrodna kryvoliniina tsylindrychna systema koordynat dlia sterzhniv iz ploskoiu vissiu dovilnoi formy", *Visnyk ODABA*, Odesa: ODABA, Vol. 68, pp. 31-38, 2017.
[19] S.B. Koval'chuk, O.V. Goryk, "Pryrodna systema koordynat dlia kryvoliniinykh kompozytnykh brusiv iz nezminnymy liniinymy rozmiramy poperechnykh pereriziv", *Mizhvuz. zb. Naukovi notatky*, Lutsk: LNTU, Vol. 65, pp. 106-117, 2019.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКТИВНЫХ УСИЛИЙ ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ БРУСЬЕВ С ПЛОСКОЙ ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

**Ковальчук С.Б.**, к.т.н.,
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4550-431X
**Горик А.В.**, д.т.н., профессор,
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2804-5580
*Полтавская государственная аграрная академия*

**Аннотация.** Для большинства задач механики деформирования стержневых элементов конструкций необходимыми исходными данными являются распределение полных нагрузок на его поверхностях, состоящих из активной нагрузки и реакции закреплений. Активная составляющая обычно известна, реактивная – требует определения, что является одним из первых шагов решения любой задачи прочности и жесткости бруса. В случае, когда нагрузка бруса представлена сосредоточенными силами и моментами, определение реакции опор, как правило, проблемы не составляет. Однако, для криволинейного бруса даже равномерно распределенная нормальная или касательная нагрузка сильно затрудняет применение известных по теоретической механике условий равновесия. Целью данной работы является построение обобщенного подхода к определению интенсивности реактивных нагрузок для статически определимого криволинейного бруса с плоской осью произвольной формы, который находится под действием системы нормальных и касательных нагрузок на продольных цилиндрических поверхностях и торцах. На основе соотношений для внутренних силовых факторов, полученных авторами в предыдущей работе, были построены обобщенные соотношения для компонент равнодействующих активной и реактивной нагрузок. Вместе с условиями статического равновесия плоской системы сил и соотношениями для моделирования сосредоточенных и локализованных нагрузок, построенные зависимости составляют основу аналитического метода определения реактивных усилий статически определимых криволинейных брусьев. Полученные соотношения апробированы на примере определения реакций опор шарнирно закрепленного бруса постоянного сечения с осью в форме параболы, находящегося под действием сосредоточенных и распределенных нагрузок. Предложенный аналитический метод статического расчета криволинейных брусьев, кроме получения числовых значений реактивных нагрузок, позволяет установить функциональные зависимости между величинами активных и реактивных сил, координатами точек их приложения и геометрией бруса, что открывает широкие возможности анализа расчетной схемы криволинейной бруса с целью ее оптимизации.

**Ключевые слова:** криволинейный брус, естественная система координат, активная нагрузка, реактивные усилия, статическое равновесие.

## ANALYTICAL DETERMINATION OF REACTIVE FORCES FOR CURVILINEAR BARS WITH A FLAT AXIS OF ARBITRARY SHAPE

**Kovalchuk S.**, PhD.,
stanislav.kovalchuk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4550-431X
**Goryk O.**, Doctor of Engineering, Professor,
oleksii.goruk@pdaa.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2804-5580
*Poltava state agrarian academy*

**Abstract.** For most tasks of the mechanics dealing with the deformation of rod structural elements, the necessary basic data are the distribution of full loads on its surfaces, consisting of an active load and the reaction of fixations. The active component is usually known, the reactive one needs to be determined, which is one of the first steps of solving any problem of strength and stiffness of the bar. In cases when the load of the bar is represented by concentrated forces and moments, the determination of the reaction of support blocks, as a rule, is not a problem. However, for a curvilinear bar, even normal or tangential loads make it difficult to apply the equilibrium conditions known in theoretical mechanics. The purpose of this paper is to develop a generalized approach to determining the intensity of reactive loads for a statically determinable curvilinear bar with a flat axis of an arbitrary shape, which is under the influence of the system of normal and tangential loads on longitudinal cylindrical surfaces and ends. On the basis of the relations for the internal force factors obtained by the authors in the previous work, generalized relations for the components of resultants of active and reactive loads were developed. Together with the conditions of static equilibrium of the plane system of forces and the relations for modeling of concentrated and localized loads, the constructed dependences form the basis of the analytical method for determining the reactive forces of statically determinable curvilinear bars. The obtained relations are tested using the example of determining the reactions of support blocks of a hinged bar with a constant cross-section with an axis in the form of a parabola under the action of concentrated and distributed loads. The proposed analytical method of static calculation of curvilinear bars, in addition to obtaining the numerical values of reactive loads, enables to establish functional relationships between the intensity of active and reactive forces, the coordinates of their application points and the geometry of the bar, which opens wide possibilities for the analysis of the design model of a curvilinear bar for the purpose of its optimization.

**Keywords:** curvilinear bar, natural coordinate system, active load, reactive forces, static equilibrium.

Стаття надійшла 3.09.2019